خیلی سبز!

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

هندسه

پایه

شامل مباحث هندسه ۱ و ۲

حسین هاشمی طاهری
و گروه مؤلفین

فهرست

فصل ۱
ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس ۱: ترسیم هندسی ۷
درس ۲: استدلال و انواع آن ۱۷

فصل ۲
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

درس ۱: نسبت و تناسب ۲۷
درس ۲: قضیهٔ تالس ۳۱
درس ۳: تشابه شکل‌های هندسی ۳۸
درس ۴: نسبت اجزای فرعی در دو مثلث متشابه ۴۵

فصل ۳
چندضلعی‌ها

درس ۱: چندضلعی ۵۱
درس ۲: مساحت و کاربردهای آن ۶۳

فصل ۴
تجسم فضایی

درس ۱: خط، نقطه و صفحه ۷۳
درس ۲: تفکر تجسمی ۷۸
درس ۳: برش و سطح‌مقطع برش ۸۱
درس ۴: دوران حول یک محور ۸۴

فصل ۵
دایره

درس ۱: مفاهیم اولیه، مماس، قاطع و زاویه در دایره ۸۷
درس ۲: روابط طولی در دایره ۹۹
درس ۳: چند ضلعی‌های محیطی و محاطی ۱۰۸

فصل ۶
تبدیل‌های هندسی و کاربردها

درس ۱: تبدیل‌های هندسی ۱۱۷
درس ۲: کابرد تبدیلات در حل مسائل هندسی ۱۲۹

فصل ۷
روابط طولی در مثلث

درس ۱: قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث ۱۳۴
درس ۲: قضیهٔ کسینوس‌ها در مثلث ۱۳۶
درس ۳: ویژگی نیمساز زاویه‌های داخلی و طول نیمسازها ۱۴۱
درس ۴ قضیهٔ هرون ۱۴۴

پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۱۴۸
پاسخ‌نامهٔ کلیدی ۲۵۱

(فصل ۱)

ترسیم‌های هندسی و استدلال

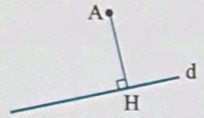
(درس ۱)

ترسیم هندسی

قبل از ورود به مبحث ترسیمات هندسی یادآوری چند تعریف، قضیه و تعدادی راه‌کار که در زیر ارائه شده‌اند لازم و ضروری هستند.

یادآوری چند تعریف

الف) فاصلهٔ یک نقطه از یک خط، طول عمودی است که از آن نقطه بر آن خط رسم می‌شود. در شکل مقابل AH بر خط d عمود است. پس طول AH همان فاصلهٔ A از خط d است. نقطهٔ H را پای عمود می‌نامند.



اگر AH بر خط d عمود باشد، AH را فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d می‌نامند.

ب) عمودمنصف یک پاره‌خط، خطی است که از وسط پاره‌خط می‌گذرد و بر آن عمود می‌باشد.

پ) نیمساز یک زاویه، نیم‌خطی است که از رأس زاویه می‌گذرد و زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ت) میانهٔ نظیر هر ضلع مثلث، پاره‌خطی است که وسط آن ضلع را به رأس مقابل آن وصل می‌کند.

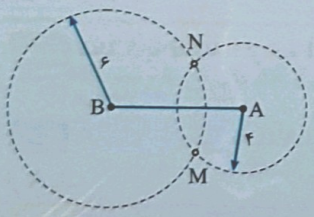
ث) ارتفاع نظیر هر ضلع مثلث، پاره‌خطی است که از رأس مقابل، بر آن ضلع یا امتداد آن عمود می‌شود.

چند راه‌کار اولیه در ترسیم‌های هندسی

الف) اگر به دنبال نقطه‌ای باشیم که از نقطهٔ مشخص A به فاصلهٔ معلوم x باشد، آن نقطه روی محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع x قرار دارد.

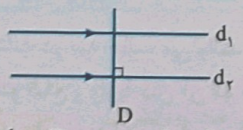
تست فرض کنیم در صفحه‌ای پاره‌خط AB به طول ۸ داده شده باشد و بخواهیم نقطه‌ای پیدا کنیم که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۶ باشد، چند نقطه در این صفحه با مشخصات مذکور وجود دارد؟

۱) دقیقاً یکی ۲) دقیقاً دوتا ۳) حداکثر یکی ۴) گاهی بی‌شمار



پاسخ گزینهٔ ۲ بنا بر راه‌کاری که در بالا بیان شد، تمام نقاطی که از A به فاصلهٔ ۴ باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۴ قرار دارند و هم‌چنین تمام نقاطی که از B به فاصلهٔ ۶ باشند نیز روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۶ قرار دارند. نقاط برخورد این دو دایره، همان نقاط موردنظر هستند. چون طول AB از مجموع دو شعاع، کوچک‌تر است، پس این دو دایره یکدیگر را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کنند و دقیقاً دو نقطه با مشخصات موردنظر وجود دارد.

ب) اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند و خط D بر d_1 عمود باشد، آن‌گاه خط D بر d_2 نیز عمود است. برعکس، اگر دو خط در صفحه بر خط سومی عمود باشند، آن دو خط با یکدیگر موازی هستند.

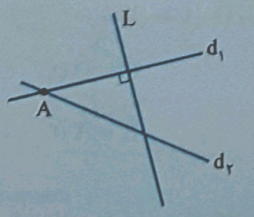


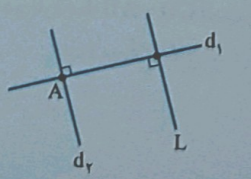
دو خط d_1 و d_2 موازی‌اند و D بر d_1 عمود است. پس D بر d_2 نیز عمود است.

تست خط‌های d_1 و d_2 در نقطهٔ A متقاطع‌اند. اگر خط L بر d_1 عمود باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) L بر d_2 نیز عمود است.
۲) L نمی‌تواند با d_2 موازی باشد.
۳) L می‌تواند با d_2 متقاطع باشد.
۴) L همیشه d_2 را قطع می‌کند.

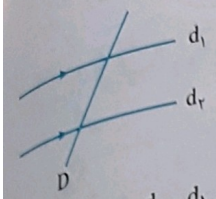
پاسخ گزینهٔ ۳ چون دو خط d_1 و d_2 متقاطع‌اند و خط L بر d_1 عمود است، پس d_2 نمی‌تواند بر L عمود باشد. زیرا در این صورت دو خط d_1 و d_2 با هم موازی خواهند بود که خلاف فرض است، پس ۱ نادرست است. اگر d_1 بر d_2 عمود باشد، چون L نیز بر d_1 عمود است، آن‌گاه L با d_2 موازی خواهد بود، پس ۲ و ۴ نیز نادرست هستند. با توجه به شکل، L می‌تواند با d_2 متقاطع باشد.





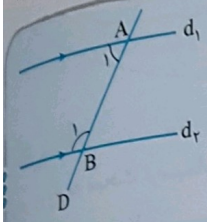
اگر d_2 بر d_1 عمود باشد، آن‌گاه L با d_2 موازی است.

پ) اگر دو خط d_1 و d_2 موازی باشند و خط D این دو خط را قطع کند، هشت زاویه پدید می‌آیند که **اغلب** چهارتای آن‌ها حاده و چهارتای دیگر منفرجه هستند، در این صورت، هر چهار زاویهٔ حاده با هم و هر چهار زاویهٔ منفرجه نیز با هم برابر هستند. این موضوع به «قضیهٔ خطوط موازی و مورب» مشهور است. توجه داشته باشیم که در این صورت، مجموع هر زاویهٔ حاده و هر زاویهٔ منفرجه، برابر ۱۸۰ درجه است؛ یعنی مکمل یکدیگرند.



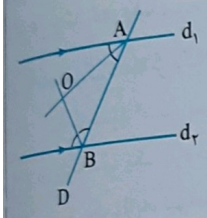
دو خط d_1 و d_2 موازی‌اند و D مورب است. تمام زاویه‌های حاده با هم برابرند و تمام زاویه‌های منفرجه نیز با هم برابر هستند.

تست **در شکل مقابل $d_2 \parallel d_1$ و خط D هر دو خط d_1 و d_2 را قطع کرده است، اگر نیمسازهای دو زاویهٔ A_1 و B_1 را رسم کنیم، کدام گزینه درست است؟**



۱) نیمساز $\hat{A}_1$ عمود بر d_2 و نیمساز $\hat{B}_1$ عمود بر d_1 است.
۲) نیمسازها با یکدیگر زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازند.
۳) نیمسازها بر یکدیگر عمود هستند.
۴) رابطهٔ مشخصی با هم ندارند.

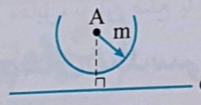
پاسخ گزینهٔ ۳ بنا بر آن‌چه که در راه‌کار (پ) بیان شد، $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ$ است، اگر AO و BO به ترتیب، نیمسازهای دو زاویهٔ A_1 و B_1 باشند، آن‌گاه $O\hat{A}B = \frac{1}{2}\hat{A}_1$ و $O\hat{B}A = \frac{1}{2}\hat{B}_1$، در نتیجه داریم:



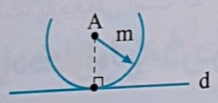
$$O\hat{A}B + O\hat{B}A = \frac{1}{2}\hat{A}_1 + \frac{1}{2}\hat{B}_1 = \frac{1}{2}(\hat{A}_1 + \hat{B}_1) = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

چون در مثلث OAB مجموع زاویه‌ها باید ۱۸۰ درجه باشد، پس $\hat{O} = 90^\circ$؛ در نتیجه دو نیمساز بر هم عمود هستند.

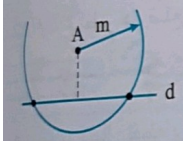
ت) اگر به دنبال نقطه‌ای روی خط مشخص d باشیم که از نقطهٔ مشخص A به فاصلهٔ معلوم m باشد، باید به مرکز A و شعاع m کمانی رسم کنیم؛ نقطه‌های برخورد این کمان با خط d (در صورت وجود)، جواب‌های مسئله هستند. اگر خط d با کمانی که رسم شده است دارای دو، یک یا هیچ نقطهٔ مشترک باشد، آن‌گاه مسئله دارای دو، یک یا هیچ جواب می‌باشد، توجه داشته باشیم که اگر نقطهٔ A روی خط d باشد، مسئله همیشه دارای دو جواب است.



اگر m کم‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد، نقطه‌ای روی خط d وجود ندارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m است.



اگر m برابر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد، یک نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m است.



اگر m بیشتر از فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d باشد، دو نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ m است.

تست **نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از خط d قرار دارد، چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲/۵ باشد؟**

۱) بی‌شمار ۲) دوتا ۳) یکی ۴) هیچ

پاسخ گزینهٔ ۴ چون فاصلهٔ A از خط d بیشتر از ۲/۵ است، بنا بر آن‌چه که در راه‌کار (ت) بیان شد، نقطه‌ای روی d وجود ندارد که به فاصلهٔ ۲/۵ از A باشد.

حالت‌های مختلف هم‌نهشتی دو مثلث

دو مثلث در سه حالت می‌توانند هم‌نهشت باشند که عبارت‌اند از:

۱ دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع، از یک مثلث با دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع، از مثلثی دیگر برابر باشند. (ض‌زض)

۲ دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه، از یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه، از مثلثی دیگر برابر باشند. (زض‌ز)

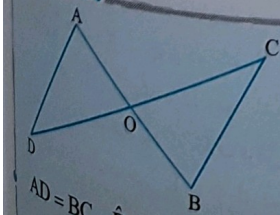
۳ سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشند. (ض‌ض‌ض)

دو مثلث قائم‌الزاویه، علاوه بر سه حالت فوق، در دو حالت خاص زیر نیز می‌توانند هم‌نهشت باشند:

۴ وتر و یک زاویهٔ حاده از یکی با وتر و یک زاویهٔ حاده از دیگری برابر باشند. (وز)

۵ وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه از یکی با وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه از دیگری برابر باشند. (وض)

تست **در شکل مقابل، O وسط دو پاره‌خط AB و CD است. کدام گزینه درست نیست؟**



۱) $\hat{C} = \hat{D}$
۲) $AD = BC$
۳) $\hat{B} = \hat{A}$
۴) $AB = CD$

پاسخ گزینهٔ ۴ دو مثلث AOD و BOC به حالت برابری دو ضلع و زاویهٔ بین، هم‌نهشت هستند. در نتیجه $AD = BC$ و $\hat{B} = \hat{A}$، $\hat{C} = \hat{D}$ ولی دلیلی ندارد $AB = CD$ باشد.

اگر مساحت مثلث ABC را با S نشان دهیم، داریم:

$$\frac{S_{\triangle AEG}}{S}=\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\left(\frac{3k}{5k}\right)^2=\frac{9}{25}\Rightarrow S_{\triangle AEG}=\frac{9}{25}S$$

$$\frac{S_{\triangle BDF}}{S}=\left(\frac{BD}{BA}\right)^2=\left(\frac{4k}{5k}\right)^2=\frac{16}{25}\Rightarrow S_{\triangle BDF}=\frac{16}{25}S$$

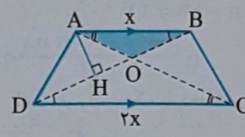
$$\frac{S_{\triangle DEH}}{S}=\left(\frac{DE}{AB}\right)^2=\left(\frac{2k}{5k}\right)^2=\frac{4}{25}\Rightarrow S_{\triangle DEH}=\frac{4}{25}S$$

از طرفی داریم:

$$S_{CFHG}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AEG}-S_{\triangle BDF}+S_{\triangle DEH}$$

$$=S-\frac{9}{25}S-\frac{16}{25}S+\frac{4}{25}S=\frac{4}{25}S=\frac{16}{100}S$$

۲۵۱- گزینهٔ ۳ دو مثلث OAB و OCD بنا به حالت تساوی زاویه‌ها با هم متشابه‌اند، اگر در نظر بگیریم $S_{\triangle OAB}=S$، آن‌گاه:



$$\frac{S_{\triangle OCD}}{S}=\left(\frac{CD}{AB}\right)^2=\left(\frac{2x}{x}\right)^2=4\Rightarrow S_{\triangle OCD}=4S$$

از طرفی با توجه به شکل دو مثلث OAB و OAD دارای ارتفاع مشترک AH هستند، پس:

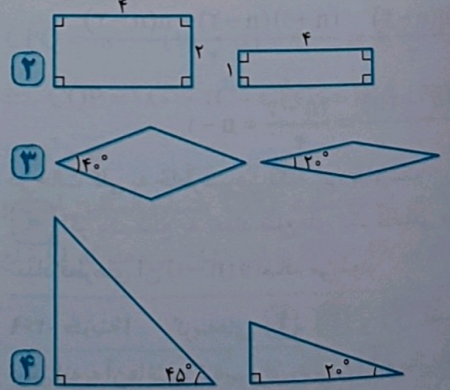
$$\frac{S_{\triangle OAD}}{S}=\frac{OD}{OB}=2\Rightarrow S_{\triangle OAD}=2S$$

(نسبت تشابه $\triangle OAB$ و $\triangle OCD$)

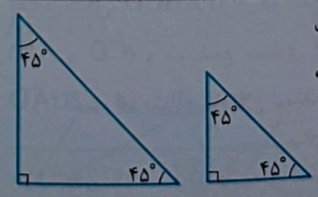
قبلاً ثابت کردیم $S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}=S$، پس $S_{\triangle OBC}=2S$. با این توضیحات، نسبت مساحت ذوزنقه به مساحت مثلث OAB می‌شود:

$$\frac{S+4S+2S+2S}{S}=9$$

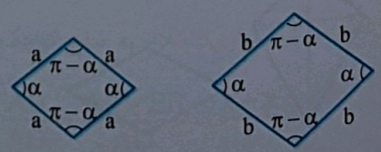
۲۵۲- گزینهٔ ۱ می‌دانیم دو nضلعی منتظم همیشه با هم متشابه‌اند. به عنوان مثال نقض برای سایر گزینه‌ها، شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



۲۵۳- گزینهٔ ۴ ۱ هر دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین متشابه‌اند، زیرا هر سه زاویهٔ آن‌ها با هم برابر است.



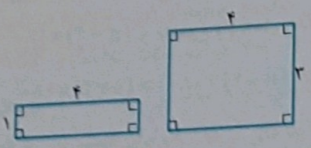
۲ اگر یک زاویه از دو لوزی با هم برابر باشد، هر چهار زاویهٔ آن‌ها با هم برابر است، ضلع‌ها هم که حتماً با هم متناسب‌اند!



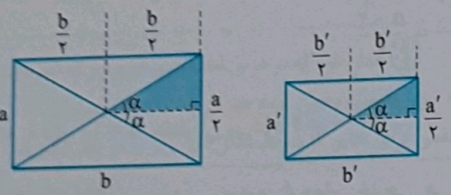
---

۳ هر دو nضلعی منتظم همیشه با هم متشابه‌اند.

۴ دو مستطیل همیشه با هم متشابه نیستند، زیرا درست است که زاویه‌های آن‌ها همیشه با هم برابر است، اما ضلع‌های آن‌ها می‌توانند متناسب نباشند.



۲۵۴- گزینهٔ ۴ ۱ اگر زاویهٔ بین دو قطر در دو مستطیل با هم برابر باشد، آن دو مستطیل با هم متشابه‌اند. دلیلش این است که در چنین حالتی، از تشابه دو مثلث رنگ‌شده نتیجه می‌گیریم ضلع‌های دو مستطیل با هم متناسب‌اند.

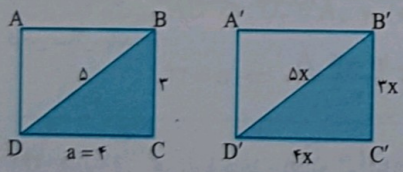


۲ زاویه‌های دو مربع که با هم برابر است، ضلع‌ها هم که همیشه متناسب‌اند، پس شرایط تشابه فراهم است!

۳ اگر زاویهٔ رأس یک مثلث متساوی‌الساقین θ باشد، دو زاویهٔ دیگر با هم مساوی و برابر با $\frac{180^\circ-\theta}{2}$ هستند؛ یعنی در مثلث‌های متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس θ، هر سه زاویه با هم برابرند که در مثلث، برابری زاویه‌ها شرط کافی برای تشابه است.

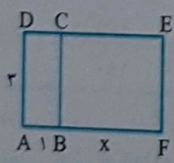
۴ دلیلی ندارد که دو لوزی همیشه با هم متشابه باشند، درست است که ضلع‌های هر دو لوزی با هم متناسب‌اند، اما زاویه‌های آن‌ها می‌تواند با هم متفاوت باشد.

۲۵۵- گزینهٔ ۱ شکل را ببینید. اگر ضلع و قطر یک مستطیل به ترتیب ۳ و ۵ واحد باشند، ضلع دیگر آن مستطیل می‌شود ۴ واحد. پس اگر مستطیل دیگری بخواهد با این مستطیل متشابه باشد، طول ضلع‌های آن به صورت 3x و 4x است، از آن‌جا که طبق فرض $S_{A'B'C'D'}=24$، داریم:



$$(3x)(4x)=24\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}\Rightarrow B'D'=5x=5\sqrt{2}$$

۲۵۶- گزینهٔ ۳ دو مستطیل ABCD و BCEF با هم متشابه‌اند، پس:



$$\frac{AB}{CB}=\frac{AD}{CE}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{3}{x}\Rightarrow x=9\Rightarrow\frac{S_{ADEF}}{S_{BCEF}}=\frac{10\times3}{9\times3}=\frac{10}{9}$$

۲۵۷- گزینهٔ ۱ وقتی نسبت مساحت‌های دو پنج‌ضلعی منتظم (که همیشه با هم متشابه‌اند) برابر است با ۲/۲۵، نسبت تشابه آن‌ها می‌شود $\sqrt{2/25}=\sqrt{1/5^2}=1/5$. نسبت محیط‌های دو چندضلعی متشابه برابر با نسبت تشابه آن‌ها است، پس دو حالت امکان‌پذیر است:

$$\frac{12}{P}=1/5\Rightarrow P=\frac{12}{1/5}=8$$

$$\frac{P}{12}=1/5\Rightarrow P=12\times1/5=18$$

خیلی سبز!

آزمون

تجربی | ریاضی | انسانی

کتاب + آزمون آزمایشی
یه ترکیب برنده

فکر کردیم حالا که درس خوندن و کتاباتون خیلی سبزه! چرا آزموناتون خیلی سبز نباشه

برای ثبت نام و اطلاعات بیشتر عدد ۱ را به شماره ۲۰۰۰۶۳۵۶۲۰۰۰۰۰ پیامک کنید

و یا این قسمت را اسکن کنید.

azmoon.kheilisabz | ۰۲۱-۶۳۵۶۲

9 786004 125413

Elipon

DRAW YOUR DREAM

الیپون بک رویای واقعی

www.elipon.com @elipon iran

تلفن مرکز پخش: ۶۳۵۶۶ - ۰۲۱